Funkcie komplexnej premennej

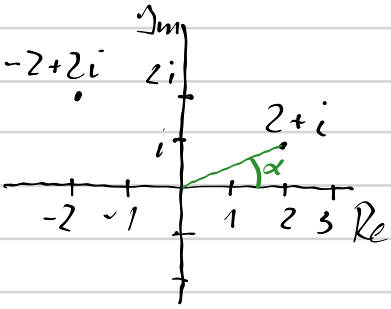
Pripomeňme základné fakty o komplexných číslach.

Komplexné číslo je číslo tvaru $a+bi$, kde a,b sú reálne čísla a i je imaginárna jednotka spĺňajúca rovnosť $i^2=-1$. Množinu všetkých komplexných čísel označujeme $\mathbb{C}$. Ak $z=a+bi\in\mathbb{C}$, tak $\operatorname{Re} z=a$ je reálna časť a $\operatorname{Im} z=b$ je imaginárna časť komplexného čísla z. Základné aritmetické operácie fungujú ako pri polynómoch s neurčitou i s tým, že i má vyššie uvedenú vlastnosť $i^2=-1$, teda

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Komplexne združené číslo k číslu $z=a+bi$ je číslo $\bar{z}=a-bi$.

Kompexné čísla, ako usporiadané dvojice môžeme reprezentovať bodmi roviny.



Geometricky, vzdialenosť čísla od $0=0+0i$ je absolútna hodnota čísla, preto pre komplexné číslo $z=a+bi$ je

$$|z|=\sqrt{z\cdot\bar{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$$

Potom podiel komplexných čísel z a w je komplexné číslo $\frac{z}{w}=\frac{z\cdot\bar{w}}{w\cdot\bar{w}}=\frac{1}{|w|^2}z\cdot\bar{w}$.

Zrejme každé komplexné číslo je možné určiť jeho vzdialenosťou od 0 a uhlom α, ktorý zviera spojnica čísla a 0 s kladnou časťou reálnej osi.

Pre $z\in\mathbb{C}$, $|z|$ nazývame aj modul z, označujeme $\operatorname{mod} z$, a $\alpha:=\arg z$ nazývame argument čísla z.

Každé komplexné číslo vieme zapísať v tvare

$$z=|z|(\cos\alpha+i\sin\alpha)=|z|e^{i\alpha}$$

Z tohto tvaru ľahko vidno, že násobenie komplexných čísel je zloženie škálovania a otáčania

$$z\cdot w=|z||w|(\cos(\alpha_z+\alpha_w)+i\sin(\alpha_z+\alpha_w))=|z||w|e^{i(\alpha_z+\alpha_w)}$$

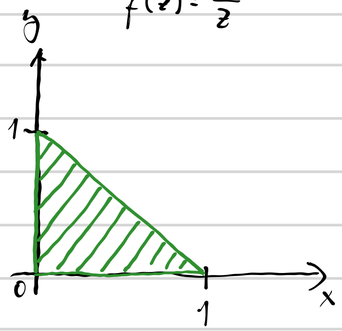
Ďalej sa budeme venovať komplexným funkciám komplexnej premennej $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$.
Pre $z=x+iy\in\mathbb{C}$ je možné funkciu f zapísať v tvare

$$f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+i\,v(x,y)$$

kde u a v sú reálne funkcie reálnej premennej.

Graf takejto funkcie nie je možné priamo zostrojiť, pretože na to by sme potrebovali štvorrozmerný priestor. Môžeme však zostrojiť obrazy rôznych oblastí komplexnej roviny, a teda vizualizovať, ako daná funkcia transformuje body komplexnej roviny.

Príklad: Nájdite obraz trojuholníka v komplexnej rovine (na obrázku) pri zobrazení $f(z)=\frac{1}{z}$



Zobrazme postupne jednotlivé strany daného trojuholníka.

1) Body strany na osi x majú ako komplexné čísla tvar $z=x$. Po dosadení máme $f(z)=\frac{1}{x}=u(x,y)+i\,v(x,y)=w$. Preto $u=\frac{1}{x}$, $v=0$. V rovine (u,v) bude obrazom uvažovanej strany časť osi u (lebo obrazy príslušných bodov majú súradnicu $v=0$). Keďže $x\in(0,1\rangle$, $u\in(1,\infty)$.

b) Zvislá strana pozostáva z bodov $z=iy$. Potom

$$f(z)=\frac{1}{iy}=-\frac{1}{y}i=u+iv \Rightarrow u=0,\quad v=-\frac{1}{y}$$

Obrazom je teda časť osi v pod $v=-1$, $v\in\langle -1,\infty)$.

c) Zvyšnú stranu tvoria body $z=x+(1-x)i$.

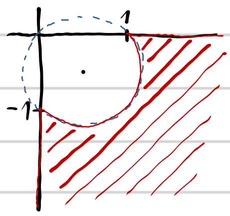
$$f(z)=\frac{1}{x+(1-x)i}=\frac{x-(1-x)i}{x^2+(1-x)^2};\quad u=\frac{x}{x^2+(1-x)^2},\quad v=-\frac{1-x}{x^2+(1-x)^2}$$

Ak označíme $w=u+iv$, máme $w=\frac{1}{z} \Rightarrow z=x+iy=\frac{1}{u+iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}$
teda $x=\frac{u}{u^2+v^2}$, $y=-\frac{v}{u^2+v^2}$.

Uvažovaná strana je určená vzťahom $y=-x+1$ a po dosadení

$$-\frac{v}{u^2+v^2}=-\frac{u}{u^2+v^2}+1 \Leftrightarrow -v=-u+u^2+v^2$$
$$\Leftrightarrow (u^2-u)+(v^2+v)=0$$
$$\Leftrightarrow \left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

Takže obrazom je časť kružnice so stredom $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ a polomerom $\frac{\sqrt{2}}{2}$



Výsledný oblúk získame dosadením niektorého bodu úsečky napr. do predpisu u a v ako funkcií x a y. Napríklad pre bod $x+iy=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ dostaneme $u+vi=1-i$. Podobne zistíme aj obraz vyšrafovanej oblasti.

Príklad: Nájdite obraz jednotkového kruhu pri zobrazení $f(z)=\frac{1}{z}$

Body kruhu sú $z=re^{i\varphi}$, $r\in\langle 0,1\rangle$, $\varphi\in\langle 0,2\pi)$. Potom $f(z)=\frac{1}{re^{i\varphi}}=\frac{1}{r}e^{-i\varphi}$.
Hľadaným obrazom sú teda všetky body zvonku jednotkovej kružnice spolu s bodmi jednotkovej kružnice.

Poznámka: Komplexné funkcie môžu byť viachodnotové. Príkladom sú n-té odmocniny a logaritmus

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\left[\frac{\arg z}{n}+2\pi k\right]},\ k=0,\dots,n-1$$

$$\ln z=\ln|z|+j(\arg z+2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$$

Holomorfné funkcie

Pojmy limity a derivácie ostávajú pre komplexné funkcie nezmenené oproti reálnemu prípadu.
Nech $f: S\to\mathbb{C}$; $S\subset\mathbb{C}$ je funkcia, α nech je hromadný bod množiny S. Nech $w\in\mathbb{C}$.
Potom $w=\lim\limits_{z\to\alpha}f(z)$ ak pre ľubovoľné $\varepsilon>0$ existuje $\delta>0$ také, že ak $z\in S$ a $|z-\alpha|<\delta$, tak $|f(z)-w|<\varepsilon$
Funkcia $f: S\to\mathbb{C}$ je spojitá v bode $\alpha\in S$ ak $\lim\limits_{z\to\alpha}f(z)=f(\alpha)$
Funkcia $f: S\to\mathbb{C}$ je spojitá, ak je spojitá v každom bode S.
Výsledky o limite súčtu, súčinu a podielu, známe z reálnych funkcií ostávajú v platnosti aj pre komplexné funkcie. Navyše máme

$$w=\lim_{z\to\alpha}f(z)\iff\bar{w}=\lim_{z\to\alpha}\overline{f(z)}\iff\lim_{z\to\alpha}\operatorname{Re}f(z)=\operatorname{Re}w \text{ a } \lim_{z\to\alpha}\operatorname{Im}f(z)=\operatorname{Im}w.$$

Nech komplexná funkcia f je definovaná v okolí bodu z. Potom komplexná derivácia f v z je

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

Hovoríme, že funkcia f je holomorfná na otvorenej množine U, ak má komplexnú deriváciu v každom bode množiny U.
Funkcia holomorfná na U je zrejme spojitá na U, lebo

$$f(z+h)-f(z)=h\cdot(f(z+h)-f(z))/h \quad \text{a}$$

$$\lim_{h\to 0}(f(z+h)-f(z))=0\cdot f'(z)=0$$

Ak f má deriváciu v z, tak príslušná limita má rovnakú hodnotu bez ohľadu na to, akým spôsobom sa blížime k 0 s h. Ak $h \to 0$ je reálne, tak

$$f'(z) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(x+h+iy)-f(x+iy)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,y)+iv(x+h,y) - u(x,y) - iv(x,y)}{h} =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Naopak pre rýdzo imaginárne ih, $h\in\mathbb{R}$

$$f'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+i(y+h))-f(x+iy)}{ih} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x,y+h)+iv(x,y+h)-u(x,y)-iv(x,y)}{ih} =$$
$$= -i\left[\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right] = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} i$$

Porovnaním týchto výsledkov dostaneme Cauchy-Riemannove rovnice

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Ak sa na $f(z)$ pozriem ako na funkciu dvoch reálnych premenných,

$$f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y),$$

tak z prvého výrazu pre $f'(z)$ máme, že

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Použitím C-R vzťahov získame štyri formálne rôzne predpisy pre f'. Pre $|f'(z)|$ máme potom

$$|f'(z)| = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

Dôležitá veta komplexnej analýzy hovorí, že derivácia holomorfnej funkcie je holomorfná. Potom z C-R máme

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0$$
$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Takže ak $f = u + iv$ je holomorfná, tak u a v sú riešenia Laplaceovej rovnice (tzv. harmonické funkcie).
Ak dve harmonické funkcie spĺňajú C-R, tak hovoríme, že sú konjugované harmonické funkcie.

Predpokladajme, že u a v majú spojité parciálne derivácie prvého rádu. Potom z viet o reálnych funkciách

$$u(x+h, y+k) - u(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x} h + \frac{\partial u}{\partial y} k + o(h+ik)$$

$$v(x+h, y+k) - v(x,y) = \frac{\partial v}{\partial x} h + \frac{\partial v}{\partial y} k + o(h+ik)$$

Potom pre $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ a z C-R máme

$$f(z+h+ik) - f(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}\right)(h+ik) + o(h+ik)$$

a preto

$$\lim_{h+ik \to 0} \frac{f(z+h+ik) - f(z)}{h+ik} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y}$$

Máme teda nasledovné tvrdenie.

Ak $u(x,y)$ a $v(x,y)$ majú spojité parciálne derivácie prvého rádu, ktoré spĺňajú C-R, tak $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ je holomorfná so spojitou deriváciou $f'(z)$

Príklad: Nájdite konjugovanú harmonickú funkciu k funkcii $u = x^2 - y^2$.
Riešenie: u je harmonická. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$, takže v musí spĺňať

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y,$$

Z prvej rovnice $v = 2xy + \varphi(y)$ a dosadením do druhej

$$2y + \varphi'(y) = 2y \Rightarrow \varphi'(y) = 0$$

Takže $v = 2xy + c$, $c \in \mathbb{C}$.
Môžeme si všimnúť, že pre $z = x+iy$ je $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$. Takže holomorfná funkcia s $u = x^2 - y^2$ je $z^2 + ic$.

Holomorfné zobrazenia a uhly

Nech $U \subset \mathbb{C}$ je otvorená a

$$\gamma : \langle a, b \rangle \to \mathbb{C}$$

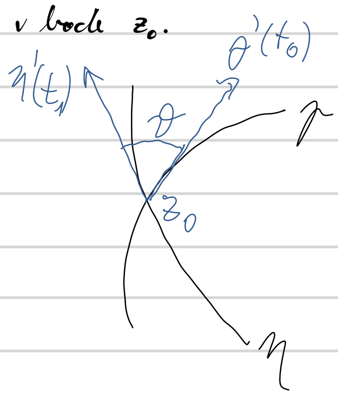
je krivka v U, $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$
Nech γ je diferencovateľná, t.j. má deriváciu

$$\gamma'(t) = x'(t) + i y'(t)$$

$\gamma'(t)$ je možné interpretovať ako dotykový vektor ku krivke γ v bode $\gamma(t)$.
Nech $f: U \to \mathbb{C}$ je holomorfná. Potom

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$$

Nech γ a η sú krivky prechádzajúce tým istým bodom $z_0 = \gamma(t_0) = \eta(t_1)$. Potom dotykové vektory $\gamma'(t_0)$ a $\eta'(t_1)$ určujú uhol ϑ, ktorý zvierajú krivky v bode z_0.



Potom dotykové vektory obrazov kriviek sú

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t))\Big|_{t=t_0} = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0) = f'(z_0)\gamma'(t_0)$$

$$\frac{d}{dt} f(\eta(t))\Big|_{t=t_1} = f'(\eta(t_1))\eta'(t_1) = f'(z_0)\eta'(t_1)$$

Teda dotykové vektory v $f(z_0)$ obrazov kriviek $f\circ\gamma$, $f\circ\eta$ sú rovnakým násobkom dotykových vektorov ku γ a η. Keďže násobenie komplexným číslom je rotácia a škálovanie, ak $f'(z_0) \neq 0$ tak uhol medzi $f\circ\gamma$ a $f\circ\eta$ je rovnaký ako uhol medzi γ a η v z_0.

Zobrazenie, ktoré zachováva uhly nazývame konformné.

Príklad: Zobrazenie $f(z) = z^2$ je konformné pre $z \neq 0$.
$f'(z) = 2z \neq 0$ pre $z \neq 0$. z^2 je holomorfná, $f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}$

Integrovanie komplexných funkcií.

Nech γ je po častiach diferencovateľná krivka $\gamma = \gamma(t)$, $a \le t \le b$. Ak $f(z)$ je definovaná a spojitá na γ, tak $f(\gamma(t))$ je spojitá a definujeme

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

Tento integrál nezávisí od parametrizácie $\gamma(t)$ v tom zmysle, že ak $t = t(\tau)$ je rastúca funkcia, ktorá zobrazí interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ na $\langle a, b \rangle$, tak integrál $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t(\tau)))\gamma'(t(\tau))t'(\tau)d\tau$.

Pre parametrizáciu v opačnom smere (ozn. $-\gamma$), $\gamma = \gamma(-t)$ $-b \le t \le -a$ máme

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$$

Pre $f = u + iv$ integrál môžeme prepísať do tvaru

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (udy + vdx)$$

Ak c je uzavretá krivka, tak máme pre holomorfnú fciu na oblasti ohraničenej c a na c:

$$\oint_c f(z)dz = \int_c (udx - vdy) + i\int_c (vdx + udy)$$

Z Greenovej vety

$$\int_c (udx + vdy) = \iint_S -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\, dxdy$$

Potom z C-R $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, preto tento integrál je nulový.

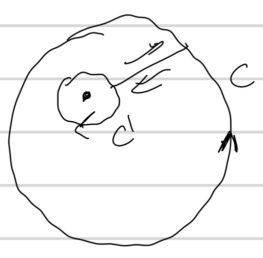
Podobne pre

$$\int_c vdx + udy = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

lebo z C-R $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

Cauchyho veta: Ak $f(z)$ je holomorfná v oblasti ohraničenej uzavretou krivkou c a je holomorfná na c, tak $\oint_c f(z)dz = 0$

V prípade, že c ohraničuje jednoducho súvislú oblasť ale vo vnútri oblasti má f singulárny bod (t.j. nemá v tom bode deriváciu), môžeme pôvodnú krivku nahradiť krivkou, ohraničujúcou tento singulárny bod v ľubovoľnom blízkom okolí, pričom hodnota integrálu pozdĺž pôvodnej krivky bude rovnaká ako pozdĺž novej krivky



Integrál pozdĺž uvedenej krivky je nulový, integrál pozdĺž dvoch opačne orientovaných ale totožných kriviek je nulový, takže $\int_c f\,dz = -\int_{c'} f\,dz$ resp. po obrátení orientácie $\int_c f\,dz = \int_{-c'} f\,dz$

Podobne, ak je v oblasti viac singulárnych bodov, každý z nich je možné izolovať jednou oblasťou a integrál pozdĺž pôvodnej krivky bude súčet integrálov pozdĺž jednotlivých kriviek.

Príklad: $\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz$, γ je kružnica $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$.

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} e^{-it} \cdot ire^{it}\,dt = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Príklad: $\int_\gamma \frac{1}{z^n}\,dz$, $\gamma(t) = re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^n} e^{-int}\, ire^{it}\,dt = \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)t}\,dt =$$

$$= \frac{i}{-i(n-1)r^{n-1}} \left[e^{-i(n-1)t}\right]_0^{2\pi} = \frac{-1}{(n-1)r^{n-1}}(1-1) = 0$$

Podobne pre funkciu $\frac{1}{(z-a)^n}$ a kružnicu so stredom r a platí

$$\int_\gamma \frac{1}{(z-a)^n}\,dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{ak } n = 1 \\ 0 & \text{pre } n \in \mathbb{Z} - \{1\} \end{cases}$$

Príklad: $\int_\gamma \frac{z-j-4}{(z+j)(z-2)}\,dz = \int_\gamma \frac{2}{z+j} - \frac{1}{z-2}\,dz$

singulárne body sú $z = -j$ a $z = 2$